Transformadas de Laplace

by Prof. Claudir Barbieri

1 Introdução

Neste trabalho estamos interessados em calcular algumas transformadas de Laplace usando os métodos adequados. Para tanto, vamos definir a transformada de Laplace como:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Exemplo 1 - Calcule a transformada de Laplace de $\mathscr{L}\{1\}$.

Solução -
Temos que $f(t) = 1$, então aplicando a definição temos:

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1.\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Pela simplicidade da transformada de Laplace de uma constante, podemos generalizar para qualquer constante, ou:

$$F(s) = \mathscr{L}\{cte\} = \frac{cte}{s}$$

Exemplo 2 - Calcule a transformada de Laplace de $\mathscr{L}\{t\}$.

Solução -
Temos que $f(t) = t$, então aplicando a definição temos:

$$F(s) = \mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty t.\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$$

Para o caso de polinômios podemos generalizar com a seguinte equação:

$$F(s) = \mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Exemplo 3 - Calcule a transformada de Laplace de $\mathscr{L}\{e^{at}\}$.

Solução -
Temos que $f(t) = e^{at}$, então aplicando a definição temos:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{a-s}\, e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty$$

Logo, concluímos que para a função exponencial a transformada de Laplace é dada por:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Agora, lembrando a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sen\theta$$

Usando esta equação como referência, vamos encontrar a transformada de Laplace para as funções seno e cosseno.

Exemplo 4 - Calcule a transformada de Laplace de $\mathscr{L}\{sen\,\omega t\}$ e $\mathscr{L}\{cos\,\omega t\}$.

Solução -
Temos que $f(t) = e^{i\omega t}$, então aplicando o valor encontrado no exemplo 3, temos:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s - i\omega}$$

Pela propriedade conhecida dos números complexos, vamos multiplicar o numerador e denominador da fração pelo complexo conjugado do denominador. Desta forma, ficamos com:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s - i\omega}\,\frac{s + i\omega}{s + i\omega} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Trabalhando algebricamente o resultado, podemos escrever:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \;+\; \frac{i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ora, comparando este resultado com a fórmula de Euler, vista anteriormente, concluímos que:

$$F(s) = \mathscr{L}\{sen\;\omega\,t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$F(s) = \mathscr{L}\{cos\;\omega\,t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

2 Propriedades

Para continuar nossos estudos, vamos enunciar algumas propriedades das transformadas de Laplace que facilitarão o cálculo das transformadas.

2.1 Linearidade

A linearidade nos garante a seguinte igualdade:

$$F(s) = \mathscr{L}\{c.f(t)\} = c.\mathscr{L}\{f(t)\}$$

ou, também

$$\mathscr{L}\{c_1.\,f(t) + c_2.\,g(t)\} = c_1.\,\mathscr{L}\{f(t)\} \;+\; c_2.\,\mathscr{L}\{g(t)\} = c_1.\,F(s) + c_2.\,G(s)$$

Exemplo 5 - Encontre $\mathscr{L}\{3\,sen\,2\,t + 4\,e^{3t}\}$

Solução -

$$\mathscr{L}\{3\,sen\,2\,t + 4\,e^{3t}\} = 3\,\mathscr{L}\{sen\,2\,t\} + 4\,\mathscr{L}\{e^{3t}\}$$

$$= 3\left(\frac{2}{s^2+4}\right) + 4\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{4\,s^2 + 6\,s - 2}{(s^2+4)(s-3)}$$

2.2 Primeira Propriedade de Translação

Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ então

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Exemplo 6 - Encontre $\mathscr{L}\{t^2\,e^{3t}\}$

Solução - Sabemos que:

$$\mathscr{L}\{t^2\} = \left(\frac{2!}{s^3}\right) = \left(\frac{2}{s^3}\right)$$

Logo, aplicando a primeira propriedade de translação, vamos encontrar:

$$\mathscr{L}\{t^2\,e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Exemplo 7 - Encontre $\mathscr{L}\{e^{-3t}(2\,cos\,4t - 4\,sen\,4t)\}$

Solução - Sabemos que:

$$\mathscr{L}\{(2\,cos\,4t - 4\,sen\,4t)\} = 2\left(\frac{s}{s^2+16}\right) - 4\left(\frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{2\,s-16}{s^2+16}$$

Assim, aplicando a primeira propriedade de translação, vamos encontrar:

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}(2\,cos\,4t - 4\,sen\,4t)\} = \frac{2\,(s+3) - 16}{(s+3)^2+16}$$

Exemplo 8 - Encontre $\mathscr{L}\{e^{3t}\,cosh\,4t\}$

Solução - Podemos escrever que:

$$\mathscr{L}\{e^{3t}\,cosh\,4t\} = \mathscr{L}\,\left\{e^{3t}\left(\frac{e^{4t}+e^{-4t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\,\left\{e^{7t}+e^{-t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-7}+\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{s-3}{s^2-6s-7}$$

Exemplo 9 - Encontre $\mathscr{L}\{e^{3t}\,cos^2\,4t\}$

Solução - Vamos lembrar que:

$$cos^2 t = \frac{1+cos2t}{2}$$

Levando isso em consideração, temos

$$\mathscr{L}\{cos^2\,4t\} = \mathscr{L}\,\left\{\frac{1+cos\,8t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1+cos\,8t\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+64}\right\}$$

Agora aplicando a primeira propriedade, temos que substituir todos os "s" da expressão anterior por "s - 3", ou

$$\mathscr{L}\{e^{3t}\,cos^2\,4t\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-3}+\frac{s-3}{(s-3)^2+64}\right\}$$

2.3 Segunda Propriedade de Translação

$$Se \quad \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) \quad e$$

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{se} \quad t > a, \\ 0, & \text{se} \quad t < a. \end{cases}$$

Logo, para encontrarmos a transformada de $g(t)$, usamos

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Exemplo 10 - Encontre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se

$$f(t) = \begin{cases} cos(t - \frac{2\pi}{3}), & \text{se} \quad t > \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \text{se} \quad t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Solução - Já sabemos que:

$\mathscr{L}\{cos\ t\} = \left(\frac{s}{s^2+1} \right)$ e como pela propriedade 2.3 temos $a = \frac{2\pi}{3}$, então:

$$\mathscr{L}\ \left\{cos\,(t - \frac{2\pi}{3})\right\} = e^{-\frac{2\pi}{3}s} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{s\,e^{-\frac{2\pi}{3}s}}{s^2+1}$$

Trabalho em Andamento.

Aguarde Atualizações!!!